

## תרגול שבוע 3

### טיטוא Plane Sweep

בכל אלגוריתם טיטוא אנחנו צריכים להציג את המרכיבים הבאים:

- האירועים, מבנה תור האירועים
- האינוריאנטה
- הסטטוס ומבנהו
- טיפול באירועים

1. (Point set maxima) נגדיר שנקודה  $p=(p_1, p_2)$  שולטת על נקודה  $q=(q_1, q_2)$  אם  $q_1 < p_1, q_2 < p_2$ . נגדיר שנקודה  $p \in P$  היא מקסימלית ב-  $P$  אם לא קיימת נקודה  $q \in P$  ששולטת עליה. בהינתן קבוצה  $P$  של  $n$  נקודות, מצא את כל הנקודות המקסימליות בזמן  $O(n \log n)$ .
2. נתונים  $n$  סגמנטים זרים ו-  $m$  מעגלים זרים במישור (המעגלים יכולים להכיל זה את זה, אך אינם נחתכים). מצא באופן יעיל את כל המעגלים שאינם נחתכים עם אף סגמנט.

### פיתרון לשאלה 1

נבצע אלגוריתם טיטוא.

האירוע: אירוע נקודה.

תור האירועים: נשמור תור אירועים ברשימה. תור האירועים יאותחל עם כל הנקודות, ממוינות לפי שיעור  $y$  יורד (אם אין מצב כללי- במקרה של נקודות עם אותו ערך  $y$ , נכניס שיעורי  $x$  קטנים יותר לתור קודם).

האינוריאנטה: בכל שלב בריצת האלגוריתם, זוהו כל הנקודות המקסימליות שנמצאות מעל ישר הטיטוא.

הסטטוס: בכל שלב בריצת האלגוריתם, נשמור במשתנה  $\max$  את שיעור ה-  $x$  המקסימלי של נקודה שהשתתפה באירוע.

טיפול באירוע נקודה: אם שיעור ה-  $x$  של הנקודה גדול מ-  $\max$ , נוציא את הנקודה לפלט ונעדכן את  $\max$  להיות שיעור ה-  $x$  של הנקודה.

ניתוח זמן ריצה: המיון לקראת ההכנסה לתור לוקח  $O(n \log n)$ . יש  $n$  אירועים והטיפול בכל אירוע לוקח  $O(1)$ . אז בסה"כ זמן הריצה הוא  $O(n \log n)$ .

הוכחת נכונות: בזמן טיטוא של המישור מלמעלה למטה, נקודה חדשה  $p$  שאנחנו מגיעים אליה היא מקסימלית  $\Leftrightarrow$  היא הייתה הכי ימנית עד כה. זאת מכיוון שהיא מקסימלית  $\Leftrightarrow$  אין נקודה שנמצאת מימינה ומעליה  $\Leftrightarrow$  כל הנקודות מעליה נמצאות משמאלה או ישירות מעליה  $\Leftrightarrow$  היא הנקודה הכי ימנית עד כה.

אז בשביל לבדוק אם נקודה חדשה היא מקסימלית, אכן מספיק לבדוק את שיעור ה- $x$  שלה לעומת שיעור ה- $x$  המקסימלי של הנקודות הקודמות. לכן אלגוריתם הטיטוא משיג את המבוקש.

**האינווריאנטה בשאלה 2:** בכל שלב בריצת האלגוריתם:

- זוהו המעגלים (חצאי המעגלים) שהתחילו מעל ישר הטיטוא ונחתכו עם סגמנט מעל ישר הטיטוא.
- עבור כל מעגל שהסתיים מעל ישר הטיטוא, זוהה אם הוא נחתך עם סגמנט או לא.