

שאלה:

תהי E רשימה לא ממוינת של n סגמנטים שהם צלעות של פוליגון קמור. תאר אלגוריתם שבזמן $O(n \log n)$ מחשב מ- E רשימה שמכילה את כל קודקודי הפוליגון, מסודרים לפי כיוון השעון.

רעיון כללי לפתרון פשוט לשאלה:

- ניצור רשימה של n קודקודי הפוליגון (אין חשיבות לסדר).
- נמצא קמור של קבוצה של n נקודות בזמן $O(n \log n)$.
- נעבור על קודקודי הקמור עם כיוון השעון ונוסיף אותם לרשימת הפלט.

פיתרון נוסף (זוהי דוגמה לפתרון שלם ומלא):

האלגוריתם:

1. נמצא את הקודקוד בעל ערך x הנמוך ביותר, ואם יש כמה כאלה אז נבחר את הקודקוד בעל ערך ה- y הנמוך מביניהם. נסמנו ב- p .
נרצה לבנות רשימה של קודקודי הפוליגון מסודרים לפי כיוון השעון, כאשר p הינו הקודקוד הראשון ברשימה.
2. נעבור על רשימת הצלעות E ונחפש את שתי הצלעות שמכילות את הקודקוד p . נניח שמצאנו זוג צלעות $e_1 = (a, p), e_2 = (p, b)$. כעת עלינו להבין מי מבין a, b הינו הקודקוד הבא אחרי p עם כיוון השעון. נוודא זאת באופן הבא: אם pab מהווה פנייה ימינה אזי a מופיע לפני b על הפוליגון כשסורקים את הקודקודים עם כיוון השעון החל מהקודקוד p .
נניח ללא הגבלת הכלליות שהוספנו את a לרשימת הקודקודים. מכאן שהקודקוד האחרון ברשימה יהיה b .
3. תהי $E' = E \setminus \{e_1, e_2\}$. נרצה לכוון כל צלע ב E' עם כיוון השעון על הפוליגון. צלע $e = (u, v)$ תכוון מ- u ל- v אם puv מהווה פניה ימינה, אחרת הצלע תכוון מ- v ל- u .
4. כעת נפעיל אלגוריתם מיון על הצלעות המכוונות ב E' על מנת לסדר את הקשתות לפי סדר הופעתן על הפוליגון עם כיוון השעון החל מהקודקוד p .
השוואה בין זוג איברים $e_a = (u, v) \in E', e_b = (r, s) \in E'$ במיון תתבצע באופן הבא:
$$e_a < e_b \Leftrightarrow pvs \text{ מהווה פניה ימינה}$$
5. כעת נעבור על רשימת הצלעות E' לפי סדר המיון, ועבור כל קשת $e = (x, y) \in E'$ נוסיף לרשימת הקודקודים את קודקוד היעד של הקשת, כלומר את y .

זמן ריצה:

שלב 1 לוקח זמן $O(n)$.

שלב 2 לוקח זמן $O(n)$ למציאת זוג הצלעות, וזמן קבוע לבדיקת הסדר ביניהן.

שלב 3 דורש $2 - n$ חישובים בזמן $O(1)$ כל אחד (קביעת הכיוון של כל צלע), כלומר בסי"כ $O(n)$.

שלב 4 הינו מיון ולכן לוקח זמן $O(n \log n)$.

שלב 5 לוקח זמן $O(n)$.

סיבוכיות זמן הריצה הכוללת: $O(n \log n)$

הוכחת נכונות:

נשים לב שעבור שלושה קודקודים u, v, w של פוליגון קמור, לא בהכרח רצופים, שמסודרים עם כיוון השעון, uvw מהווה בהכרח פנייה ימינה (נובע מהנתון שהפוליגון קמור).

הסתמכנו על טענה זו כאשר כיוונו את הקשתות ב E' , וכן במיון הקשתות בשלב 4: קשת e_a תופיע לפני קשת e_b מכונת e_b כאשר סורקים את קשתות הפוליגון עם כיוון השעון החל מקודקוד p אם ורק אם pxy מהווה פנייה ימינה, כאשר x ו- y הינם קודקודי היעד של הקשתות e_a ו- e_b , בהתאמה.

בשלב 5 נאסוף את קודקודי היעד של הקשתות הממוינות ונוסיף לרשימת הפלט.