משפט (קשור לאלגוריתם הטיטוא לבניית דיאגרמת Voronoi):
קשת (חלק של פרבולה) יכולה להתווסף ל"קו החוף" אך ורק באמצעות אירוע site.

הוכחה:

מניחים בשלילה שקשת β_p שמוגדרת ע"י אתר p שנמצא מעל קו החוף עומדת לפרוץ את קו החוף (מלמעלה). יש שתי אפשרויות:
(א) הפרבולה פורצת את קו החוף מלמעלה באמצע קשת β_q שמוגדרת ע"י אתר q.
(ב) הפרבולה פורצת את קו החוף מלמעלה בין שתי קשתות β_q , β_r.

נוכיח ש (א) אינו אפשרי.
הרעיון הוא שרגע לפני שהפרבולה β_p פורצת את קו החוף באמצע הפרבולה β_q, הן משיקות זו לזו בנקודה. נוכיח שלא יתכן שיש נקודת השקה אחת. כלומר, נוכיח שמדובר באותה הפרבולה, וזו סתירה.

נניח ששני האתרים שמגדירים את הפרבולות הם $p = (p_x, p_y), q = (q_x, q_y)$
כמו כן ללא הגבלת הכלליות נניח שישר הטיטוא נמצא ב y=0, וכן שנקודת ההשקה של הפרבולות היא $(0, y)$.

נקודת ההשקה נמצאת על כל אחת מהפרבולות ולכן מתקבלת המשוואה הבאה:
$$\frac{1}{2p_y}\left(x^2 - 2p_x x + p_x^2 + p_y^2\right) = \frac{1}{2q_y}\left(x^2 - 2q_x x + q_x^2 + q_y^2\right)$$

נציב $x = 0$ ונקבל:

$$\frac{1}{p_y}\left(p_x^2 + p_y^2\right) = \frac{1}{q_y}\left(q_x^2 + q_y^2\right) \qquad (1)$$

השיפוע של המשיק בנקודה $(0, y)$ זהה עבור שתי הפרבולות. לכן נגזור את הפרבולות לפי x ונשווה:

$$\frac{1}{2p_y}(2x - 2p_x) = \frac{1}{2q_y}(2x - 2q_x)$$
השיוויון מתקיים עבור הנקודה שבה x=0, לכן נציב ונקבל:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{q_x}{q_y}$$

כלומר:
$$p_y = \frac{q_y}{q_x} p_x \qquad (2)$$

נציב את (2) ב (1) ונקבל:

$$\frac{q_x}{q_y p_x}\left(p_x^2 + \frac{q_y^2}{q_x^2} p_x^2\right) = \frac{1}{q_y}(q_x^2 + q_y^2)$$

$$\frac{q_x}{p_x}\left(p_x^2 + \frac{q_y^2}{q_x^2} p_x^2\right) = (q_x^2 + q_y^2)$$

$$\left(q_x p_x + \frac{q_y^2}{q_x} p_x\right) = (q_x^2 + q_y^2)$$

$$\frac{p_x}{q_x}\left(q_x^2 + q_y^2\right) = \left(q_x^2 + q_y^2\right)$$

$$p_x = q_x$$

ולכן גם מתקיים

$p_y = q_y$

כלומר מדובר באותה פרבולה.

בכיתה הראנו שגם (ב) אינו אפשרי.